SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Donatella Danielli

REGOLARITÀ ALLA FRONTIERA PER SOLUZIONI DI EQUAZIONI SUBELLITTICHE NON LINEARI

21 luglio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto

Si stabilisce una stima del modulo di continuità alla frontiera per soluzioni del problema di Dirichlet associato ad equazioni subellittiche nonlineari. Da essa si deduce la parte sufficiente di un criterio di tipo Wiener per la regolarità dei punti di frontiera.

Abstract

In this note we establish an estimate, in terms of subellitpic p-capacity, for the modulus of continuity at the boundary of the solution to the Dirichlet problem associated to a class of subelliptic quasilinear equations. We infer from it the sufficiency part of a Wiener type criterion for the regularity of boundary points.

1 Introduzione

Siano $X_1, \ldots, X_m$ campi vettoriali di classe C^∞ in $\mathbf{R}^n$ soddisfacenti la condizione di Hörmander per l'ipoellitticità [H]

$$\text{rango Lie}\,[X_1, \ldots, X_m] = n$$

in ogni punto $x \in \mathbf{R}^n$. Negli ultimi anni, molta attenzione è stata dedicata allo studio dell'operatore lineare

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j,$$

dove X_j^* denota l'aggiunto formale di X_j, e, a tutt'oggi, se ne ha un quadro piuttosto soddisfacente. D'altra parte, in alcune questioni di geometria (ad esempio lo studio delle varietà CR) si presenta naturalmente il problema dello studio di una corrispondente teoria nonlineare.

Consideriamo l'equazione

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^* A_j(x, Xu) = 0, \tag{1}$$

dove $Xu = (X_1 u, \ldots, X_m u)$ è il gradiente subellittico di u ed $A = (A_1, \ldots, A_m) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ è una funzione misurabile tale che esistono $p \in (1, \infty)$ e $C_0 > 0$ per cui si ha, per $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^m$,

$$\begin{aligned} &|A(x,\xi)| \le C_0 |\xi|^{p-1}, \\ &A(x,\xi) \cdot \xi \ge |\xi|^p. \end{aligned} \tag{2}$$

Il modello per eccellenza di tale classe di operatori subellittici quasilineari si ottiene con la scelta

$$A_j(x,\xi) = A_j(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi_j,$$

$j = 1, \ldots, m$; si ha così il cosiddetto p-laplaciano subellittico

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^* (|Xu|^{p-2} X_j u).$$

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbf{R}^n$. Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ si dice *regolare* se la soluzione u del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} X_j^* A_j(x, Xu) = 0, \\ u - f \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{3}$$

ha il valore limite $f(x_0)$ in x_0 qualunque sia $f \in S^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Qui $S^{1,p}(\Omega)$ (rispettivamente $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$) denota il completamento dell'insieme

$$\{u \in \mathrm{Lip}\,(\Omega)(\mathrm{risp.\,Lip}\,_0(\Omega)) \mid \|u\|_{S^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$$

nella norma

$$\|u\|_{S^{1,p}(\Omega)} = \left[\int_\Omega (|Xu|^p + |u|^p)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il concetto di soluzione deve essere interpretato in un opportuno senso debole. Diciamo che $u \in S^{1,p}(\Omega)$ è *soluzione (debole)* di (1) se

$$\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega A_j(x, Xu) X_j \varphi dx = 0$$

per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$.

Il risultato che presento è una stima, in termini di p-capacità subellittica, per il modulo di continuità alla frontiera della soluzione del problema di Dirichlet (3). Per poterlo enunciare precisamente, è necessario introdurre alcune notazioni.

Sia d la distanza di controllo associata ai campi $X_1, \ldots, X_m$. Poniamo, per $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ed $r > 0$,

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbf{R}^n | d(x_0, y) < r\},$$

$$\Omega_{x_0}(r) = \Omega \cap B(x_0, r).$$

La p-capacità subellittica di un condensatore (K, Ω) è definita come segue.

Definizione 1 *Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto. Si pone*

$$X - cap_p(K, \Omega) = \inf\{\int_\Omega |X\phi|^p dx | \ \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ e \ \phi = 1 \ su \ K\}$$

Infine introduciamo il nucleo

$$\varphi_p(x_0, \Omega^c, t) = \frac{X - \mathrm{cap}_p(\Omega^c \cap B(x_0,t), B(x_0,2t))}{X - \mathrm{cap}_p(B(x_0,t), B(x_0,2t))}.$$

Siamo ora in grado di enunciare il seguente

Teorema 1 *Sia Ω un aperto limitato in $\boldsymbol{R}^n$ e sia $f \in S^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Siano inoltre u soluzione di (1.3), $x_0 \in \partial\Omega$, $R_0 > 0$, $0 < r \leq \rho \leq R_0/2$. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente solo dai campi $X_1, \ldots, X_m$, da p e C_0 (qui p e C_0 sono come in (2)), tale che*

$$osc(u, \Omega_{x_0}(r)) \leq osc(f, \partial\Omega \cap \overline{B(x_0, 2\rho)}) +$$

$$+ osc(f, \partial\Omega) exp(-C \int_r^\rho \varphi_p(x_0, \Omega^c, t)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t}).$$

Prima di proseguire, è opportuno fare un breve commento sul concetto di p-capacità subellittica. Nonostante la sua definizione sia formalmente analoga a quella di capacità euclidea variazionale, le sue proprietà sono piuttosto riposte. Ad esempio, il valore "soglia" nella stima della p-capacità subellittica di un condensatore anulare, ovvero formato da due palle concentriche di raggio arbitrario, non è nè la dimensione n dello spazio ambiente (come accade nel caso euclideo), nè il suo sostituto naturale nel contesto subellittico, la cosiddetta dimensione omogenea dell'aperto (il numero Q che compare in (5), bensì una proprietà puntuale dei campi $X_1, \ldots, X_m$: la dimensione omogenea legata al centro dell'anello. Vale infatti il seguente risultato (cfr. [CDG3]).

Lemma 1 *Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $Q(x_0)$ la dimensione omogenea in x_0. Allora esiste $R_0 = R_0(\Omega) < 1$ tale che per ogni $0 < r < R \leq R_0$ si ha*

$$X - cap_p(B(x_0,r), B(x_0,R)) \geq \begin{cases} C\dfrac{|B(x_0,r)|}{r^p}, & 1 < p < Q(x_0), \\ C\left(log\dfrac{R}{r}\right)^{1-Q(x_0)}, & p = Q(x_0), \\ C\left|R^{\frac{p-Q(x_0)}{p-1}} - r^{\frac{p-Q(x_0)}{p-1}}\right|^{1-p}, & p > Q(x_0). \end{cases}$$

La costante C dipende da p, R e $Q(x_0)$. Valgono stime analoghe anche dall'alto.

Dal Teorema 1 si deduce una condizione sufficiente per la regolarità dei punti di frontiera.

Teorema 2 *Sia Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Se*

$$\int_0^1 \varphi_p(x_0, \Omega^c, t)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} = +\infty, \tag{4}$$

allora x_0 è regolare.

Quando l'operatore in considerazione è il laplaciano, tale condizione altro non è che il classico criterio di Wiener [W], risalente al 1924. Nel 1963 Littman, Stampacchia e Weinberger [LSW] dimostrarono che il medesimo criterio caratterizza i punti regolari per operatori uniformemente ellittici in forma di divergenza a coefficienti misurabili e limitati. In particolare, la regolarità di un punto di frontiera è indipendente dall' operatore. Il Teorema 2 è stato dimostrato da Maz'ya [M] nel 1970 per operatori ellittici nonlineari della forma $-\operatorname{div} A(x, \nabla u)$ definendo l'integrale di tipo Wiener (4) in termini di p-capacità euclidea. Alcuni anni più tardi (1977) Gariepy e Ziemer [GZ] hanno esteso questo risultato ad una classe molto generale di equazioni.

La parte necessaria del criterio di Wiener per operatori ellitici (che nel caso nonlineare è più difficile di quella sufficiente, al contrario di quanto accade in ambito lineare) è stata provata da Lindqvist e Martio ([LM], 1985) per $p > n-1$ e solo recentemente (1994) da Kilpeläinen e Maly [KM] per ogni $p > 1$. In particolare, dai lavori [M] e [KM] segue che la regolarità di un punto di frontiera dipende solo da n e da p, non dal tipo di operatore.

Per quanto concerne il contesto subellittico, vorrei ricordare due risultati. Il primo, dovuto a Negrini e Scornazzani [NS], è il criterio di Wiener per operatori del tipo

$$L_0 = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 + \sum_{i,j=1}^{p} b_{i,j}[X_i, X_j] + \sum_{j=1}^{p} c_j X_j,$$

dove $X_1, \ldots, X_p$ sono campi regolari soddisfacenti la condizione di Hörmander e b_{ij}, c_j sono funzioni di classe C^∞. Successivamente, Citti [C] ha dimostrato che se f è una funzione hölderiana su $\partial\Omega$, allora la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L_0 u = 0, \\ u - f \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

dove L_0 è come sopra, è anch'essa hölderiana fino alla frontiera.

L'approccio da me seguito si ispira ad un adattamento del lavoro di Maz'ya che appare in [HKM], con alcune modifiche sostanziali dovute alla peculiarità dell'ambiente subellittico. Vediamo subito quali sono gli elementi che distinguono il lavoro.

1. La disuguaglianza di Harnack per l'equazione (1) ed il teorema di immersione di Sobolev $\overset{o}{S}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, dove q sarà specificato nel seguito, entrambi provati in [CDG1].
2. Un lemma di ricoprimento, che fornisce l'analogo "ad hoc" dei cubi diadici in $\mathbf{R}^n$.
3. L'esistenza di costanti positive C, R_0 e Q tali che
$$|B(x, \sigma R)| \geq C\sigma^Q |B(x, R)| \tag{5}$$
per ogni $x \in \Omega$, $R \leq R_0$, $0 < \sigma < 1$, conseguenza notevole dei lavori [NSW], [FP].
4. L'esistenza delle funzioni cut-off subellittiche, dimostrata in [CGL].
5. La possibilità di rappresentare una funzione di classe C^∞ a supporto compatto contenuto in una palla in termini di un integrale frazionario in cui compare il suo gradiente subellittico.

Concludo questa introduzione descrivendo una condizione geometrica che garantisce la regolarità di un punto di frontiera.

Diciamo che un insieme E ammette una *palla nontangenziale esterna* nel punto $x_0 \in \partial E$ se esistono due costanti $C \geq 1$ ed $r_0 > 0$ tale che la palla $B(x_0, r)$ contiene una palla $B(y, \frac{r}{c}) \subseteq E^c$ per ogni $r \in (0, r_0)$.

Ad esempio, è facile vedere che un dominio nontangenzialmente accessibile (NTA) nel senso di Jerison e Kenig [JK] ammette una palla nontangenziale esterna in ogni punto di frontiera.

Operatori lineari in domini NTA, in ambito subellettico, sono stati studiati in [CG].

Vale il seguente risultato:

Teorema 3 *Se Ω ammette una palla nontangenziale esterna in $x_0 \in \partial\Omega$, allora x_0 è regolare.*

2 Alcuni risultati preliminari

In questo paragrafo vorrei enunciare alcuni risultati cruciali nella prova del Teorema 1.

Cominciamo studiando due proprietà fini degli spazi di tipo Sobolev $S^{1,p}(\Omega)$. Premetto la seguente

Definizione 2 i) *Sia* $u : \Omega \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. *Diciamo che* u *è* (X,p)-quasicontinua *in* Ω *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un insieme aperto* $G \subseteq \Omega$ *tale che* $X - cap_p(\overline{G}, \mathbf{R}^n) < \varepsilon$ *ed* $u\,|_{\Omega \setminus G}$ *è a valori reali e continua;*

ii) *Una successione di funzioni* $\psi_j : \Omega \to \mathbf{R}$ converge (X,p)-quasiuniformemente *in* Ω *ad una funzione* ψ *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* $G \subseteq \Omega$ *tale che* $X - cap_p(\overline{G}, \mathbf{R}^n) < \varepsilon$ *e* $\psi_j \to \psi$ *uniformemente in* $\Omega \setminus G$. *La successione* ψ_j *converge* localmente (X,p)-quasiuniformemente *se converge* (X,p)*-quasiuniformemente in ciascun aperto* $D \subset\subset \Omega$.

Il primo risultato è una caratterizzazione di elementi di $S^{1,p}(\Omega)$ in termini di funzioni (X,p)-quasicontinue; la dimostrazione è una generalizzazione al contesto subellittico di quella apparsa in [F]. Ricordo che si dice che una proprietà vale (X,p)*-quasidappertutto* se vale al di fuori di un insieme di p-capacitá subellittica nulla.

Teorema 4 *Sia* $\{\varphi_j\}$ *una successione di funzioni in* $C(\Omega) \cap S^{1,p}(\Omega)$, *di Cauchy in* $S^{1,p}(\Omega)$. *Allora esiste una sottosuccessione* $\{\varphi_{k_j}\}$ *convergente localmente* (X,p)*-quasiuniformemente ad una funzione* $u \in S^{1,p}(\Omega)$. *In particolare,* u *è* (X,p)*-quasicontinua e* $\{\varphi_{k_j}\}$ *converge ad* u *puntualmente* (X,p)*-quasidappertutto in* Ω.

Conseguenza immediata del Teorema 4 è il seguente

Corollario 1 *Sia* $u \in S^{1,p}(\Omega)$. *Allora esiste una funzione* $v \in S^{1,p}(\Omega)$ (X,p)*-quasicontinua tale che* $u = v$ *quasiovunque (rispetto alla misura di Lebesgue).*

Il secondo risultato è una caratterizzazione delle funzioni di $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$ in termini di (X,p)-quasicontinuitá, provata originalmente nel caso euclideo da Bagby ([B]).

Teorema 5 *Sia* $u \in S^{1,p}(\Omega)$. *Allora* $u \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$ *se, e solo se, esiste una funzione* v *definita su tutto* $\mathbf{R}^n$ *ed* (X,p)*-quasicontinua tale che* $v = u$ *quasiovunque in* Ω *(rispetto alla misura di Lebesgue) e* $v = 0$ (X,p)*-quasidappertutto in* Ω.

Passiamo ora ad esaminare alcune proprietá fondamentali delle soluzioni di (1). Per ragioni di completezza, riporto due risultati di [CDG1] già menzionati nel precedente capitolo.

Nel seguito Q denoterà la costante che appare in (5).

Teorema 6 (Disuguaglianza di Harnack) *Siano $1 < p \leq Q$, $U \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto limitato. Sia $u \in S^{1,p}(\Omega)$ una soluzione nonnegativa di (1.1). Allora esistono $C > 0$ ed $R_0 > 0$ tali che per ogni $B_R = B(x,R)$, con $B_{4R} \subseteq U$ ed $R \leq R_0$,*

$$ess\,sup_{B_R} u \leq C\, ess\,inf_{B_R} u.$$

Teorema 7 (Teorema di immersione di Sobolev) *Siano U un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $p \in (1,Q)$. Allora esistono due costanti positive C ed R_0 tali che per ogni $x \in U$, $B_R = B(x,R) \subset U$ con $R \leq R_0$, si ha*

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|^{kp} dx\right)^{\frac{1}{kp}} \leq CR\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |Xu|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$u \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(B_R)$. Qui $1 \leq k \leq \frac{Q}{Q-p}$.

Osservo esplicitamente che il Teorema 7 puó essere visto anche come corollario pressoché immediato del teorema di Sobolev "geometrico" $\overset{\circ}{S}{}^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Q}{Q-1}}(\Omega)$, dimostrato in [CDG2]. Vediamo ora alcune conseguenze di questi due teoremi, cominciando con un principio del massimo forte per soluzioni di (1).

Teorema 8 *Sia $u \in S^{1,p}(\Omega)$ una soluzione di (1). Allora od u é costante in Ω oppure non puó prendere massimo o minimo in Ω.*

Il secondo risultato é un lemma di confronto per soluzioni di (1).

Lemma 2 *Siano $u, v \in \S^{1,p}(\Omega)$ soluzioni di (1) e sia $min(u-v,0) \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$. Allora $u \geq v$ quasiovunque (rispetto alla misura di Lebesgue) in Ω.*

Infine, dalle condizioni strutturali (2) si deduce che le soluzioni di (1) godono della proprietá di quasiminimo, nel senso specificato dal seguente lemma.

Lemma 3 *Sia $u \in S^{1,p}(\Omega)$ una soluzione di (1). Assumiamo $u - v \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$. Allora*

$$\int_\Omega |Xu|^p dx \leq C_0^p \int_\Omega |Xv|^p dx,$$

dove C_0 è come in (2).

3 Cenni sulla dimostrazione del Teorema 1

Per brevità, mi limiteró a considerare il caso $1 < p \leq Q$. La trattazione nel caso $p > Q$ è infatti piú semplice, grazie al fatto che un punto ha p-capacitá subellittica positiva e l'integrale di Wiener (4) é sempre divergente.

Sia Ω un dominio limitato e sia K un compatto in Ω. Consideriamo una funzione $f \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $f \equiv 1$ in K. La soluzione del problema di Dirichlet (3) in $\Omega \setminus K$ con dato al bordo f è detta (X,p)-*potenziale* di K in Ω e si denota con $R(K,\Omega)$. In virtú del Teorema 5, possiamo assumere che $R(K,\Omega)$ sia una funzione (X,p)-quasicontinua in $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$, con $R(K,\Omega) = 1$ in K. È facile verificare che la definizione di $R(K,\Omega)$ è indipendente dalla scelta di f.

Vale la seguente stima, che costituisce il punto chiave della prova del Teorema 1.

Lemma 4 *Poniamo* $u = R(K,\Omega)$. *Per* $\gamma \in (0,1)$ *definiamo* $K_\gamma = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq \gamma\}$. *Allora*

$$\frac{1}{C_0^{p+1}}\gamma^{p-1}X - cap_p(K_\gamma,\Omega) \leq X - cap_p(K,\Omega) \leq C_0^{p+1}\gamma^{p-1}X - cap_p(K_\gamma,\Omega).$$

La dimostrazione di questo lemma, che ometto, basa essenzialmente sui Teoremi 4 e 5, sulle condizioni strutturali (2) e sul Lemma 3. Il prossimo risultato, che gioca un ruolo cruciale nella dimostrazione del Teorema 1, è ancora una stima in termini (X,p)-capacitari di un condensatore anulare.

Lemma 5 *Esistono due costanti positive* R_0 *e* C *tali che, dati* $B(x,tr) \subset\subset \Omega$, $r < tr \leq R_0$, *si abbia*

$$\frac{1}{C}|B(x,r)|r^{-p} \leq X - cap_p(B(x,r),B(x,tr)) \leq C|B(x,r)|r^{-p}.$$

La costante C *dipende solamente da* Ω, *dai campi* $X_1,\ldots,X_m$, *da* t *e da* p.

Dimostrazione: Per il risultato di esistenza delle funzioni cut-off subellittiche menzionato nel paragrafo 1, esiste una funzione $\psi \in C_0^\infty(B(x,tr))$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$; $\psi \equiv 1$ su $B(x,r)$ e $|X\psi| \leq \frac{C}{r(t-1)}$.

Si ha allora

$$X - \mathrm{cap}_p(B(x,r),B(x,tr)) \leq \int_{B(x,tr)} |X\psi|^p dx \leq \frac{C}{r^p(t-1)^p}|B(x,tr)|.$$

Ora, per (5),

$$|B(x,r)| = \left|B\left(x, \frac{1}{t}tr\right)\right| \geq Ct^{-Q}|B(x,tr)|$$

e dunque

$$X - \text{cap}_p(B(x,r), B(x,tr)) \leq \frac{Ct^Q}{r^p(t-1)^p}|B(x,r)|.$$

Dall'altro lato, sia $u \in C_0^\infty(B(x,tr))$, $u \geq 1$ su $B(x,r)$. Allora, come mostrato in [CDG1], si ha

$$|u(y)| \leq C \int_{B(x,tr)} |Xu(\xi)| \frac{d(y,\xi)}{|B(y,d(y,\xi))|} d\xi = CI_1(|Xu|)(y),$$

dove $y \in B(x,tr)$ ed I_1 denota l'operatore di integrazione frazionaria. Grazie alla proprietà di continuità $L^p \to L^p$ di quest' ultimo (Teorema 2.7, [CDG1]), si può concludere

$$\begin{aligned}|B(x,r)| \leq \int_{B(x,tr)} |u(y)|^p dy &\leq C \int_{B(x,tr)} |I_1(Xu)(y)|^p dy \\ &\leq C(tr)^p \int_{B(x,tr)} |Xu|^p dy,\end{aligned}$$

da cui si trae, per passaggio all' estremo inferiore,

$$X - \text{cap}_p(B(x,r), B(x,tr)) \geq Ct^{-p}r^{-p}|B(x,r)|$$

Questo conclude la prova.

■

Osservo esplicitamente che il Lemma 5 può essere dedotto come caso particolare del Lemma 1. La prima conseguenza importante dei Lemma 4 e 5 è una stima che lega i valori di un (X,p)-potenziale ad una formula di densità capacitaria.

Lemma 6 *Siano $K \subseteq B_r = B(x_0,r)$, con $2r \leq R_0$, ed $u = R(K, B_{2r})$. Allora*

$$u(x) \geq C\left(\frac{X - cap_p(K, B_{2r})}{X - cap_p(B_r, B_{2r})}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

per ogni $x \in B_r$ e per un' opportuna costante $C = C(X_1, \ldots, X_m, \Omega, C_0, p) > 0$.

Dimostrazione: Poniamo $M = \max_{\partial B_{3/2r}} u$, $m = \min_{\partial B_{3/2r}} u$. Senza perdita di generalità, si può assumere $M > 0$. Grazie alla disuguaglianza di Harnack (Teorema 6) e ad un argomento di ricoprimento si deduce

$$M \leq cm.$$

Dal Lemma 4 segue

$$\begin{aligned} X - \operatorname{cap}_p(K, B_{2r}) &\leq CM^{p-1} X - \operatorname{cap}_p(\{u \geq M\}, B_{2r}) \\ &\leq Cm^{p-1} X - \operatorname{cap}_p(\{u \geq M\}, B_{2r}). \end{aligned} \tag{6}$$

Proviamo ora che l'insieme $\{u \geq M\}$ è contenuto in $\overline{B}_{3/2r}$. Per assurdo, supponiamo che esista $\overline{x} \in B_{2r} \setminus \overline{B}_{3/2r}$ tale che $u(\overline{x}) \geq M$ e poniamo $\eta = \min(M - u, 0)$. Per il Teorema 5, $\eta \in \overset{\circ}{S}{}^{1,p}(B_{2r} \setminus \overline{B}_{3/2r})$. Applicando il lemma di confronto 2, si trae $M - u \geq 0$ in $B_{2r} \setminus \overline{B}_{3/2r}$ ed in particolare $u(\overline{x}) = M$. Ma questo viola il principio di massimo (Teorema 8). Dunque $\{u \geq M\} \subset \overline{B}_{3/2r}$. Per la proprietà di monotonia della capacità,

$$X - \operatorname{cap}_p(\{u \geq M\}, B_{2r}) \leq X - \operatorname{cap}_p(\overline{B}_{3/2r} \setminus B_{2r}). \tag{7}$$

In virtù del Lemma 5, con $t = 2$ e $t = \frac{4}{3}$ rispettivamente,

$$X - \operatorname{cap}_p(B_r, B_{2r}) \simeq |B_r| r^{-p} \simeq X - \operatorname{cap}_p(B_{3/2r}, B_{2r}). \tag{8}$$

Da (6), (7) e (8) si deduce

$$X - \operatorname{cap}_p(K, B_{2r}) \leq Cm^{p-1} X - \operatorname{cap}_p(B_r, B_{2r}).$$

In altri termini

$$\min_{\partial B_{3/2r}} u = m \geq C \left(\frac{X - \operatorname{cap}_p(K, B_{2r})}{X - \operatorname{cap}_p(B_r, B_{2r})} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ancora grazie al Lemma 2, è immediato riconoscere che $u(x) \geq m$ per ogni $x \in B_{3/2r}$ e dunque

$$u(x) \geq C \left(\frac{X - \operatorname{cap}_p(K, B_{2r})}{X - \operatorname{cap}_p(B_r, B_{2r})} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

per ogni $x \in B_{3/2r}$. ■

Dal Lemma 6 si deduce il seguente risultato, di cui ometto la prova.

Lemma 7 *Siano $x_0 \in \partial\Omega$, $0 < \rho \le R_0/2$ e si ponga*

$$v = 1 - R(\Omega^c \cap B(x_0, \rho), B(x_0, 2\rho)).$$

Allora per ogni $r \le \rho$ si ha

$$v \le \exp\Big(- C \int_r^\rho \varphi_p(x_0, \Omega^c, t)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t}\Big)$$

in $B(x_0, r)$, dove C è una costante positiva dipendente solo dai campi $X_1, \dots, X_m$, da Ω, da p e C_0.

Possiamo ora dare la dimostrazione del Teorema 1. Non è limitativo supporre $f(x_0) = 0$. Sia $\rho > 0$ fissato e sia v come nel Lemma 7.
Dimostrazione: Si consideri la funzione

$$s_1 = v \max_{\partial\Omega} f + \max_{\partial\Omega \cap \overline{B(x_0, 2\rho)}} f.$$

Non è limitativo assumere v (X, p)–quasicontinua in $\mathbf{R}^n$, $v = 1$ in $B(x_0, 2\rho)^c$.
Poichè $f(x_0) = 0$, si ha $\max_{\partial\Omega} f \ge 0$ e dunque, per il principio del massimo

$$s_1 \ge \max_{\partial\Omega} f \ge u \text{ su } \partial B(x_0, 2\rho) \cap \Omega.$$

Usando il Teorema 5 si vede subito che la funzione $\min(s_1, u) - u$ è in $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}$ $(\Omega_{x_0}(2\rho))$. Pertanto, in virtù del Lemma 2,

$$s_1 \ge u \text{ in } \Omega_{x_0}(2\rho).$$

Analogamente, posto

$$s_2 = \min_{\partial\Omega \cap \overline{B(x_0, 2\rho)}} f + v \min_{\partial\Omega} f,$$

risulta

$$s_2 \le u \text{ in } \Omega_{x_0}(2\rho).$$

Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}(u, \Omega_{x_0}(r)) &\le \sup\nolimits_{\Omega_{x_0}(r)} s_1 - \inf\nolimits_{\Omega_{x_0}(r)} s_2 \\ &\le \sup\nolimits_{\Omega_{x_0}(r)} v \operatorname{osc}(f, \partial\Omega) + \operatorname{osc}(f, \partial\Omega \cap \overline{B(x_0, 2\rho)}). \end{aligned}$$

La conclusione del teorema segue immediatamente dal Lemma 7. ■

References

[B] T. Bagby, "Quasitopologies and rational approximation", *J. Funct. Anal.*, 10 (1972), 259-268.

[CDG1] L. Capogna, D. Danielli e N. Garofalo, "An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations", *Comm. P. D. E.*, 18 (1993), 1765-1794.

[CDG2] L. Capogna, D. Danielli e N. Garofalo, "The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality", in via di pubblicazione su *Comm. Anal. Geom.*

[CDG3] L. Capogna, D. Danielli e N. Garofalo, "Capacity estimates and the local behaviour of singular solutions of nonlinear subelliptic equations", preprint.

[CG] L. Capogna e N. Garofalo, "A subelliptic nontangential limit theorem: remarks and examples", preprint.

[C] G. Citti, "Wiener estimates at boundary points for Hörmander's operators", *Boll. U.M.I.*, 2-B (1988), 667–681.

[CGL] G. Citti, N. Garofalo e E. Lanconelli, "Harnack's inequality for sum of squares of vector fields plus a potential", *Amer. J. Math.*, 115, No. 3 (1993), 699-734.

[FP] C. Fefferman e D. H. Phong, "Subelliptic eigenvalue problems", in *Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund,* Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1981, 590-606.

[F] J. Frehse, "Capacity methods in the theory of partial differential equations", Jber. d. Math.-Verein, 84 (1982), 1-44.

[GZ] R. Gariepy e W. P. Ziemer, "A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 67 (1977) 25-39.

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen e O. Martio, "Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations", Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford (1993).

[H] L. Hörmander, "Hypoelliptic second order differential equations", *Acta Math.,* 119 (1967), 147–171.

[JK] D. S. Jerison e C. Kenig, "Boundary behaviour of harmonic funtions", *Adv. Math.*, 46 (1982), 80-147.

[KH] T. Kilpeläinen e J. Maly, "The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations", *Acta Math.,* 172 (1994), 137-161.

[LM] P. Lindquist e O. Martio, "Two theorems of N. Wiener for solutions of quasilinear elliptic equations", *Acta Math.,* 155 (1985), 153-171.

[LSW] W. Littman, G. Stampacchia e H. F. Weinberger, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients", *Annali S.N.S. Pisa,* Serie III, 17 (1963), 43-77.

[M] V. G. Maz'ya, "On the continuity at a boundary point of solutions of quasilinear elliptic equations," *Vestnik Leningrad Univ. Math.,* 3 (1976), 225–242. Traduzione inglese di Vestnik Leningrad. Univ., *Mat. Mekh. Astronom,* 25 (1970), 42-55 (in russo).

[NSW] A. Nagel, E. M. Stein e S. Wainger, "Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties," *Acta Math.,* 155 (1985), 103-147.

[NS] P. Negrini e V. Scornazzani, "Wiener criterion for a class of degenerate elliptic operators", *J. Diff. Eq.,* 66 (1987), 151-164.

[W] N. Wiener, "Certain notions in potential theory", *J. Math. Phys.,* 3 (1924), 24–51; ristampato in *Norbert Wiener: Collected Works,* Vol. 1, MIT Press, 1976, 364-391.